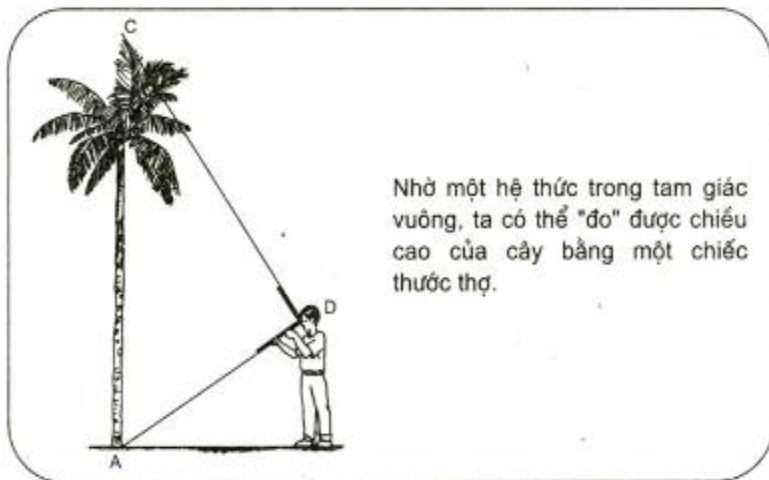


Chương I – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

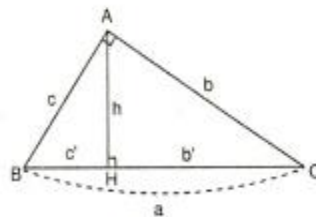
Trong tam giác vuông, nếu biết hai cạnh, hoặc một cạnh và một góc nhọn thì có thể tính được các góc và các cạnh còn lại của tam giác đó hay không ?

§1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông



Nhờ một hệ thức trong tam giác vuông, ta có thể "đo" được chiều cao của cây bằng một chiếc thước thợ.

Xét tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền BC = a, các cạnh góc vuông AC = b và AB = c. Gọi AH = h là đường cao ứng với cạnh huyền và CH = b', BH = c' lần lượt là hình chiếu của AC, AB trên cạnh huyền BC (h.1).



Hình 1

Bài 1: MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Xét ΔABC vuông tại A.

Đặt cạnh huyền $BC = a$.

Cạnh góc vuông $AB = c$, $AC = b$.

Đường cao $AH = h$

Hình chiếu của AB trên cạnh huyền BC là $BH = c'$

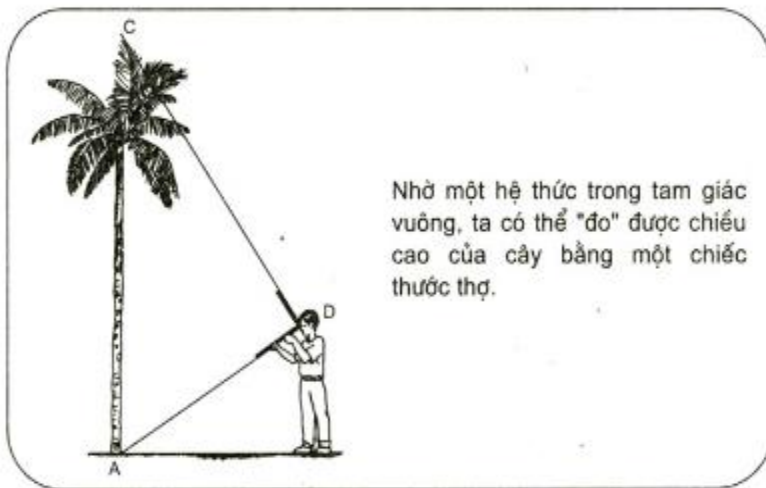
Hình chiếu của AC trên cạnh huyền BC là $CH = b'$

Các hệ thức sau đây sẽ làm việc với a, b, c, h, b', c, đã nêu ở trên.

Chương I – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

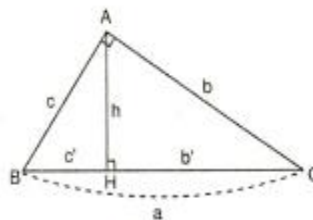
Trong tam giác vuông, nếu biết hai cạnh, hoặc một cạnh và một góc nhọn thì có thể tính được các góc và các cạnh còn lại của tam giác đó hay không ?

§1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông



Nhờ một hệ thức trong tam giác vuông, ta có thể "đo" được chiều cao của cây bằng một chiếc thước thợ.

Xét tam giác ABC vuông tại A, cạnh huyền BC = a, các cạnh góc vuông AC = b và AB = c. Gọi AH = h là đường cao ứng với cạnh huyền và CH = b', BH = c' lần lượt là hình chiếu của AC, AB trên cạnh huyền BC (h.1).



Hình 1

Bài 1: MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Xét ΔABC vuông tại A.

Đặt cạnh huyền $BC=a$.

Cạnh góc vuông $AB=c$, $AC=b$.

Đường cao $AH=h$

Hình chiếu của AB trên cạnh huyền BC là $BH=c'$

Hình chiếu của AC trên cạnh huyền BC là $CH=b'$

Các hệ thức sau đây sẽ làm việc với a, b, c, h, b', c', đã nêu ở trên.

Các hệ thức này ta có thể tìm ra ở lớp 8 dựa vào tam giác đồng dạng.

Ví dụ

$$\Delta ABC \sim \Delta HBA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BH \Rightarrow c^2 = a \cdot c'$$

$$\Delta ABC \sim \Delta HAC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CH \Rightarrow b^2 = a \cdot b'$$

$$\Delta HBA \sim \Delta HAC \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} \Rightarrow HA^2 = HB \cdot HC \Rightarrow h^2 = b' \cdot c'$$

Nội dung SGK

1. Hệ thức giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền

ĐỊNH LÍ 1

Trong một tam giác vuông, bình phương mỗi cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

Cụ thể, trong tam giác ABC vuông tại A (h.1), ta có

$$b^2 = ab', c^2 = ac'. \quad (1)$$

Chứng minh (h.1)

Xét hai tam giác vuông AHC và BAC. Hai tam giác vuông này có chung góc nhọn C nên chúng đồng dạng với nhau. Do đó $\frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC}$ suy ra $AC^2 = BC.HC$, tức là $b^2 = a.b'$. Tương tự, ta có $c^2 = a.c'$.

Ví dụ 1. (Định lý Py-ta-go - Một hệ quả của định lý 1)

Rõ ràng, trong tam giác vuông ABC (h.1), cạnh huyền $a = b' + c'$, do đó

$$b^2 + c^2 = ab' + ac' = a(b' + c') = a \cdot a = a^2.$$

Như vậy, từ định lý 1, ta cũng suy ra được định lý Py-ta-go.

2. Một số hệ thức liên quan tới đường cao

ĐỊNH LÍ 2

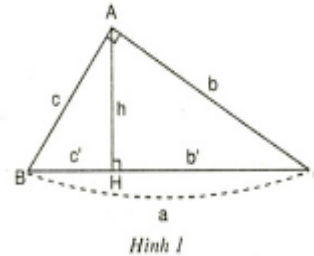
Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

Cụ thể, với các quy ước ở hình 1, ta có

$$h^2 = b'.c'. \quad (2)$$

Ghi nội dung bài

1, Hệ thức giữa cạnh góc vuông và hình chiếu của nó trên cạnh huyền.



Định lí: SGK

$$b^2 = a.b'; \quad c^2 = a.c'$$

Chứng minh:

$$\Delta ABC \sim \Delta HBA (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC.BH \Rightarrow c^2 = a.c'$$

$$\Delta ABC \sim \Delta HAC (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC.CH \Rightarrow b^2 = a.b'$$

2, Một số hệ thức liên quan tới đường cao.

Định lí 2: SGK

$$h^2 = b'.c'$$

Chứng minh

$$\Delta HBA \sim \Delta HAC (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} \Rightarrow HA^2 = HB.HC \Rightarrow h^2 = b'.c'$$

Nội dung SGK

?1 Xét hình 1. Chứng minh $\Delta AHB \sim \Delta CHA$. Từ đó suy ra hệ thức (2).

Ví dụ 2. Tính chiều cao của cây trong hình 2, biết rằng người đo đứng cách cây 2,25m và khoảng cách từ mắt người đo đến mặt đất là 1,5m.

Giải. Ta có tam giác ADC vuông tại D, DB là đường cao ứng với cạnh huyền AC và $AB = 1,5\text{m}$. Theo định lý 2, ta có

$$BD^2 = AB \cdot BC$$

tức là

$$(2,25)^2 = 1,5 \cdot BC,$$

suy ra

$$BC = \frac{(2,25)^2}{1,5} = 3,375 \text{ (m)}.$$

Vậy chiều cao của cây là

$$AC = AB + BC = 1,5 + 3,375 = 4,875 \text{ (m)}.$$

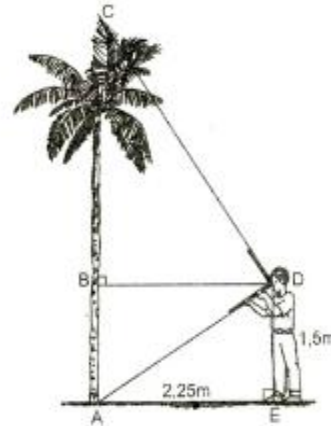
• Định lý 2 thiết lập mối quan hệ giữa đường cao ứng với cạnh huyền và các hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền của một tam giác vuông. Định lý 3 dưới đây thiết lập mối quan hệ giữa đường cao này với cạnh huyền và hai cạnh góc vuông.

ĐỊNH LÝ 3

Trong một tam giác vuông, tích hai cạnh góc vuông bằng tích của cạnh huyền và đường cao tương ứng.

Với các kí hiệu trong hình 1, kết luận của định lý 3 có nghĩa là

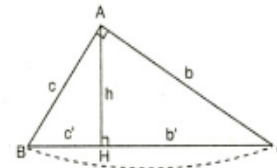
$$bc = ah. \quad (3)$$



Hình 2

Ghi nội dung bài

?1/SGK:



Hình 1

ΔHBA và ΔHAC có

$$\angle AHB = \angle AHC = 90^\circ;$$

$\angle HAB = \angle HCA$ (Phụ với $\angle HAC$)

Do đó $\Delta HBA \sim \Delta HAC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} \Rightarrow HA^2 = HB \cdot HC \Rightarrow h^2 = b' \cdot c'$$

Ví dụ 2: SGK

$BD^2 = AB \cdot BC$ chính là hệ thức $h^2 = b' \cdot c'$

Với $BD=h$, $AB=b'$; $BC=c'$

Định lý 3/SGK:

$$ah=bc$$

Nội dung SGK

Từ công thức tính diện tích tam giác, ta nhanh chóng suy ra hệ thức (3). Tuy nhiên, có thể chứng minh hệ thức (3) bằng cách khác.

72 Xét hình 1. Hãy chứng minh hệ thức (3) bằng tam giác đồng dạng.

Nhờ định lí Py-ta-go, từ hệ thức (3), ta có thể suy ra một hệ thức giữa đường cao ứng với cạnh huyền và hai cạnh góc vuông. Thật vậy, ta có

$$ah = bc \Rightarrow a^2 h^2 = b^2 c^2 \Rightarrow (b^2 + c^2) h^2 = b^2 c^2 \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2}.$$

Từ đó ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}. \quad (4)$$

Hệ thức (4) được phát biểu thành định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ 4

Trong một tam giác vuông, nghịch đảo của bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tổng các nghịch đảo của bình phương hai cạnh góc vuông.

Ví dụ 3. Cho tam giác vuông trong đó các cạnh góc vuông dài 6cm và 8cm. Tính độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh góc vuông.

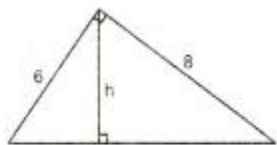
Giải. (h.3)

Gọi đường cao xuất phát từ đỉnh góc vuông của tam giác này là h . Theo hệ thức giữa đường cao ứng với cạnh huyền và hai cạnh góc vuông, ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2}.$$

Từ đó suy ra $h^2 = \frac{6^2 \cdot 8^2}{6^2 + 8^2} = \frac{6^2 \cdot 8^2}{10^2}$, do đó $h = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$ (cm).

➤ **Chú ý.** Trong các ví dụ và các bài tập tính toán bằng số của chương này, các số đo độ dài ở mỗi bài nếu không ghi đơn vị ta quy ước là cùng đơn vị đo.



Hình 3

Ghi nội dung bài

?2/SGK:

Chứng minh công thức $ah=bc$ (định lí 3)

- Cách 1: Dựa vào tam giác đồng dạng.

Chứng minh:

$\Delta ABC \sim \Delta HBA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BC.AH = AB.AC \Rightarrow ah = bc$$

- Cách 2: Dựa vào diện tích:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH.BC = \frac{1}{2} AB.AC$$

$$\Rightarrow AH.BC = AB.AC \Rightarrow ah = bc$$

Định lí 4/SGK

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Chứng minh:

$$\text{Từ } ah = bc \Rightarrow a^2 h^2 = b^2 c^2 \Rightarrow (b^2 + c^2) h^2 = b^2 c^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} = \frac{b^2}{b^2 c^2} + \frac{c^2}{b^2 c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$



Có thể em chưa biết

Các hệ thức $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$ (1) và $h^2 = b'c'$ (2) (xem hình 1) còn được phát biểu dựa vào khái niệm trung bình nhân.

Hệ thức (1) được phát biểu như sau :

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông là trung bình nhân của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

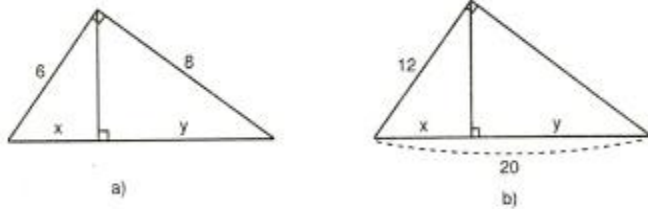
Tương tự, hệ thức (2) được phát biểu như sau :

Trong một tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền là trung bình nhân của hai đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.

Bài tập

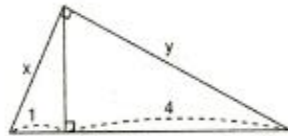
Hãy tính x và y trong mỗi hình sau :

1. (h.4a, b)



Hình 4

2. (h.5)



Hình 5

- Khái niệm trung bình nhân: SGK

* Tóm tắt các hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông.

1, $b^2 = a.b'$; $c^2 = a.c'$

2, $h^2 = b'.c'$ 3, $ah = bc$

4, $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ 5, $a^2 = b^2 + c^2$

6, $a = b' + c'$

Bài tập 1/SGK: Tính x, y trong hình.

Hình 4a.

- Cho: Tam giác vuông, $b=6$, $c=8$.

-Yêu: Tính x, y ($x=b'$, $y=c'$)

Giải

Bài cho tam giác vuông,

theo Pytago $a^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow a = 10$ (do $a > 0$)

Áp dụng hệ thức $b^2 = a.b'$ có $6^2 = 10.x \Rightarrow 36 = 10x \Rightarrow x = 3,6$

Áp dụng hệ thức $c^2 = a.c'$ có $8^2 = 10.y \Rightarrow 64 = 10y \Rightarrow y = 6,4$

Vậy $x = 3,6$; $y = 6,4$

Hình 4b.

Cho a, b

Yêu tính b' , c'

- Từ hệ thức 1, $b^2 = a.b'$; $c^2 = a.c'$ tính được x.

- Kết hợp $x+y=20$ để tìm y.

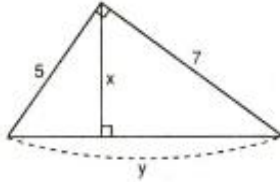
Bài 2/SGK:

- Cho $b'=1$; $c'=4$.

Tính được $a = 1 + 4 = 5$, rồi tính x, y ($x=b$, $y=c$) dựa vào các hệ thức

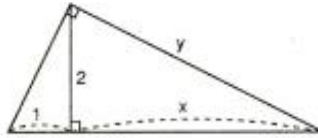
Nội dung SGK

3. (h.6)



Hình 6

4. (h.7)

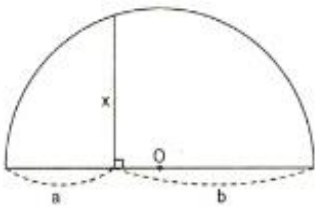


Hình 7

Luyện tập

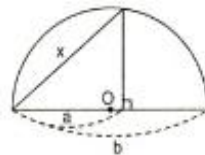
- Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 và 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Hãy tính đường cao này và độ dài các đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.
- Đường cao của một tam giác vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài là 1 và 2. Hãy tính các cạnh góc vuông của tam giác này.
- Người ta đưa ra hai cách vẽ đoạn trung bình nhân x của hai đoạn thẳng a, b (tức là $x^2 = ab$) như trong hai hình sau :

Cách 1 (h.8)



Hình 8

Cách 2 (h.9)



Hình 9

Ghi nội dung bài

Bài 3/SGK

- Cho $b=5, c=7$
- Yêu cầu tính $h=x, a=y$.

Hướng dẫn

- Từ b, c tính được a theo Pytago
- Áp dụng hệ thức $ah=bc$ để tính $h=x$.

Bài 4/SGK:

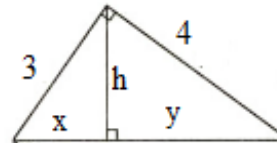
- Cho $b'=1, h=2$.
- Yêu cầu tính $c=y, c'=x$.

Hướng dẫn

- Tính $c'=x$ từ hệ thức $h^2=b'.c'$
 - Biết $x \Rightarrow a=1+x$, áp dụng hệ thức $b^2=a.b'$ để tìm $b=y$
- Hoặc sau khi tính x , tìm y theo Pytago (hai cạnh góc vuông là 2 và x).

Bài 5/SGK:

Vẽ hình theo yêu cầu



Biết $b=3, c=4$.

Theo Pytago tính được a .

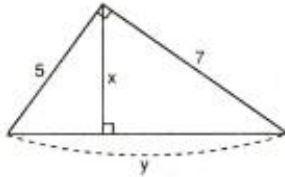
Từ $ah=bc$, tính được h .

Từ $b^2=a.b'$ tính được $b'=x$

Từ $c^2=a.c'$ tính được $c'=y$ hoặc $y=a-x$.

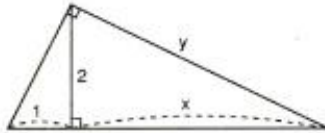
Nội dung SGK

3. (h.6)



Hình 6

4. (h.7)

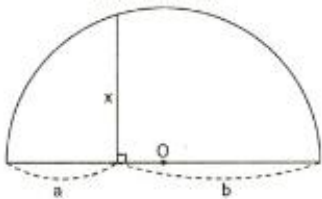


Hình 7

Luyện tập

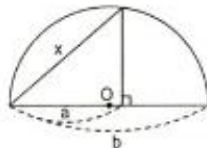
- Trong tam giác vuông với các cạnh góc vuông có độ dài là 3 và 4, kẻ đường cao ứng với cạnh huyền. Hãy tính đường cao này và độ dài các đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.
- Đường cao của một tam giác vuông chia cạnh huyền thành hai đoạn thẳng có độ dài là 1 và 2. Hãy tính các cạnh góc vuông của tam giác này.
- Người ta đưa ra hai cách vẽ đoạn trung bình nhân x của hai đoạn thẳng a, b (tức là $x^2 = ab$) như trong hai hình sau :

Cách 1 (h.8)



Hình 8

Cách 2 (h.9)



Hình 9

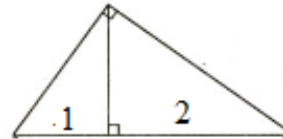
Dựa vào các hệ thức (1) và (2), hãy chứng minh các cách vẽ trên là đúng.

Gợi ý. Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác ấy là tam giác vuông.

Ghi nội dung bài

Bài 6/SGK:

Vẽ hình theo yêu cầu



Biết $b'=1, c'=2$. Cần tính b, c .

Tính được $a=3$

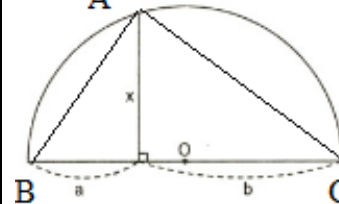
Áp dụng hệ thức $b^2=a.b'$ tính được b

Áp dụng hệ thức $c^2=a.c'$ tính được c

Bài 7/SGK:

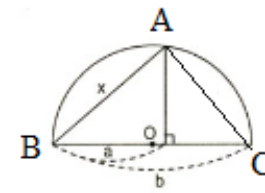
Vẽ lại hình

Cách 1 (h.8)



Hình 8

Cách 2 (h.9)



Hình 9

Cả hai trường hợp đều có $\angle BAC = 90^\circ$ (trung tuyến bằng nửa cạnh ứng với trung tuyến nên $\triangle ABC$ vuông tại A)

Cách 1:

Áp dụng hệ thức $h^2=b'.c'$ với $h=x, b'=a, c'=b$ ta có $x^2=a.b$

Cách 2: áp dụng hệ thức $b^2=a.b'$

Với b trong hệ thức là x trong hình vẽ.

a trong hệ thức là b trong hình vẽ.

b' trong hệ thức là a .

Ta có $x^2=a.b$

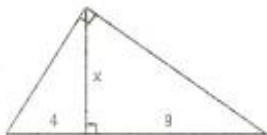
Nội dung SGK

Dựa vào các hệ thức (1) và (2), hãy chứng minh các cách vẽ trên là đúng.

Gợi ý. Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh đó thì tam giác ấy là tam giác vuông.

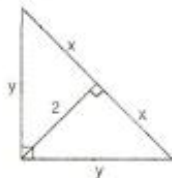
8. Tìm x và y trong mỗi hình sau :

a) (h.10)



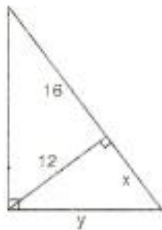
Hình 10

b) (h.11)



Hình 11

c) (h.12)



Hình 12

9. Cho hình vuông ABCD. Gọi I là một điểm nằm giữa A và B. Tia DI và tia CB cắt nhau ở K. Kẻ đường thẳng qua D, vuông góc với DI. Đường thẳng này cắt đường thẳng BC tại L. Chứng minh rằng

a) Tam giác DIL là một tam giác cân ;

b) Tổng $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi khi I thay đổi trên cạnh AB.

Ghi nội dung bài

Bài 8/SGK:

a, Cho $b'=4$; $c'=9$. Yêu cầu tính $h=x$.

Áp dụng hệ thức $h^2=b'.c'$ có $x^2=4.9$ từ đó suy ra x .

b, Cho $h=2$. Yêu cầu tính $b=c=y$; $b'=c'=x$

Áp dụng hệ thức $h^2=b'.c'$ có $2^2=x.x$ từ đó suy ra x .

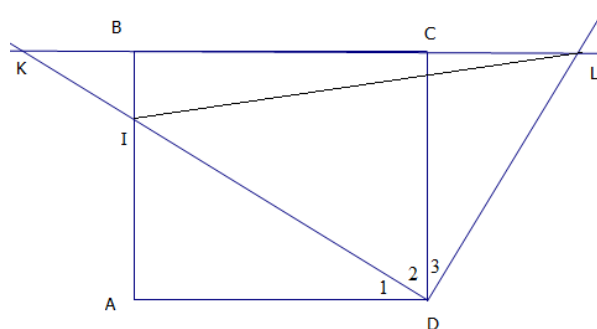
Biết x , tính y theo Pytago hoặc theo hệ thức $b^2=a.b'$

c, Cho $h=12$; $b'=16$. Yêu cầu tính $c=y$; $c'=x$.

Áp dụng hệ thức $h^2=b'.c'$ có $12^2=16.x$ từ đó suy ra x .

Biết x ; tính y theo Pytago hoặc tính a rồi áp dụng hệ thức $c^2=a.c'$ để tìm x .

Bài 9/SGK: Vẽ hình



a, Chứng minh $\triangle DLI$ cân theo sơ đồ sau

$\triangle DLI$ cân $\Leftarrow DI=DL \Leftarrow \triangle DAI = \triangle DLC$ (cgv-gn)

$\Leftarrow AD=DC$; $D_1 = D_3$ (cùng phụ D_2)

b, Từ $DI=DL$ nên $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DL^2} + \frac{1}{DK^2}$

Áp dụng hệ thức $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ có $\frac{1}{DC^2} = \frac{1}{DL^2} + \frac{1}{DK^2}$

Do DC không đổi nên $\frac{1}{DI^2} + \frac{1}{DK^2}$ không đổi.

Nội dung SGK



Có thể em chưa biết

Các hệ thức $b^2 = ab'$, $c^2 = ac'$ (1) và $h^2 = b'c'$ (2) (xem hình 1) còn được phát biểu dựa vào khái niệm trung bình nhân.

Hệ thức (1) được phát biểu như sau :

Trong một tam giác vuông, mỗi cạnh góc vuông là trung bình nhân của cạnh huyền và hình chiếu của cạnh góc vuông đó trên cạnh huyền.

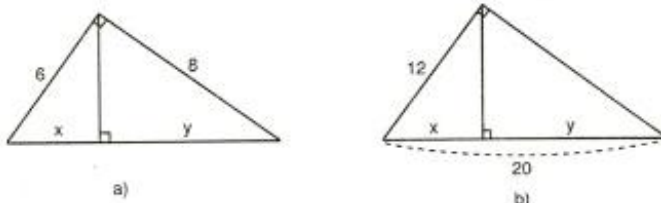
Tương tự, hệ thức (2) được phát biểu như sau :

Trong một tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền là trung bình nhân của hai đoạn thẳng mà nó định ra trên cạnh huyền.

Bài tập

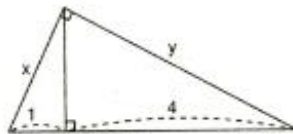
Hãy tính x và y trong mỗi hình sau :

1. (h.4a, b)



Hình 4

2. (h.5)



Hình 5

Ghi nội dung bài

* Tóm tắt các kiến thức trong bài:

1, Ghi nhớ các hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông để áp dụng vào bài tập.

$$1, b^2 = a.b'; \quad c^2 = a.c'$$

$$2, h^2 = b'.c' \quad 3, ah = bc$$

$$4, \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad 5, a^2 = b^2 + c^2$$

$$6, a = b' + c'$$

2, Cách trình bày bài tập cho đề bài dưới dạng hình vẽ.

Ví dụ như: Bài tập 1/SGK: Tính x, y trong hình.

Hình 4a.

- Cho: Tam giác vuông, $b=6$, $c=8$.

-Yêu: Tính x, y ($x=b'$, $y=c'$)

Giải

Bài cho tam giác vuông,

theo Pytago $a^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow a = 10$ (do $a > 0$)

Áp dụng hệ thức $b^2 = a.b'$ có $6^2 = 10.x \Rightarrow 36 = 10x \Rightarrow x = 3,6$

Áp dụng hệ thức $c^2 = a.c'$ có $8^2 = 10.y \Rightarrow 64 = 10y \Rightarrow y = 6,4$

Vậy $x = 3,6$; $y = 6,4$